

DOI:10.7652/xjtuxb201411021

多重网格在黏性流动最小二乘等几何模拟中的应用

陈德祥, 徐自力

(西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 针对最小二乘等几何方法模拟黏性流动时条件数大、迭代法收敛速度慢的问题,提出了基于多重网格技术的加速方法。计算中自动生成一系列疏密不同的网格,在最密网格上用最小二乘等几何方法将 Navier-Stokes 方程离散为代数方程组,用多重网格方法作为独立求解器或共轭梯度法的预处理器迭代求解所得到的代数方程组。对雷诺数为 100、400、1 000 和 2 500 的顶盖驱动流进行了数值模拟,计算中进行 23 次迭代可使方程组的余量降低 10 个数量级,流动特征量的计算误差在 1% 以内。计算结果表明,通过多重网格技术加速迭代,提高了最小二乘等几何方法模拟黏性流动的计算效率。

关键词: 多重网格;最小二乘;等几何方法;共轭梯度法;Navier-Stokes 方程

中图分类号: O241.82;O357.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2014)11-0122-06

An Application of Multigrid in Viscous Flow Simulations with Least Squares Isogeometric Method

CHEN Dexiang, XU Zili

(State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A multigrid technique to accelerate iteration is proposed to solve the problem of low convergence rate due to large condition number in simulating viscous flow with the least squares isogeometric method. A series of grids with different element sizes are automatically generated in analysis. The least squares isogeometric method is used to discretize the Navier-Stokes equations into a system of linear equations on the densest grid, and the system is iteratively solved using either the multigrid method as standard solver or the preconditioner of the conjugate gradient method. Numerical simulations are performed on lid driven cavity flow with $Re=100, 400, 1\,000$ and $2\,500$. The residual of algebraic equations is reduced about 10 order of magnitude after 23 iterations, and the calculation error on characteristic parameters of the cavity flow is less than 1%. The results show that the performance of the least squares isogeometric method for viscous flow is improved when the multigrid acceleration technique is used.

Keywords: multigrid; least squares; isogeometric method; conjugate gradient method; Navier-Stokes equations

黏性流动现象由 Navier-Stokes 方程描述,由于 非线性导致的复杂性,该方程常用数值方法求解。

收稿日期: 2014-05-19。 作者简介: 陈德祥(1979—),男,博士生;徐自力(通信作者),男,教授,博士生导师。 基金项目: 国家“973 计划”资助项目(2011CB706505)。

网络出版时间: 2014-08-13 网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20140813.1008.003.html>

文献[1]中对线性的 Stokes 方程提出了一种最小二乘等几何方法,用非均匀有理 B 样条(NURBS)构造有限元空间,用速度和压力作为独立变量,不增加辅助独立变量。对非线性项进行线性化后,最小二乘等几何方法可推广到 Navier-Stokes 方程的求解[2]。

文献[1-2]中采用直接方法求解所得的代数方程组,当自由度数增多时直接解法的成本高,需用迭代法求解,这时迭代算法的效率决定了整个程序的计算效率。最小二乘等几何方法进行流动模拟时,所得到的代数方程条件数大,常用的 Richardson 型迭代和 Krylov 子空间型迭代随着条件数增大收敛速度降低[3],难以满足要求,因此本文用多重网格技术来提高线性方程组的迭代收敛速度。

多重网格法是目前解代数方程的一种高效迭代算法,Gahalaut 等在 2013 年以泊松方程为对象研究了多重网格在等几何方法中的应用,结果显示,提高 NURBS 阶数则多重网格的收敛速度降低[4];刘石等将多重网格与共轭梯度法相结合,改进了采用高阶 NURBS 时的收敛性[5];陈德祥等研究了多重网格在最小二乘等几何方法中的应用,给出了基于离散 B 样条的网格转换算法[6]。本文根据 Navier-Stokes 方程的特点对文献[6]中的多重网格算法进行改进,在此基础上建立了多重网格共轭梯度法,通过算例对比研究了多重网格作为独立求解器和作为共轭梯度法的预处理矩阵时的收敛性,最后求解了雷诺数为 400、1 000、2 500 时的顶盖驱动流。

1 最小二乘等几何方法

定常黏性不可压流动由 Navier-Stokes 方程描述,其归一化形式可写成

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2)$$

式中: $\mathbf{u}$ 为流动速度; p 为压力; $\mathbf{f}$ 为流体所受到的体积力; ν 为流体的黏性系数; Ω 为流动区域; $\mathbf{x}$ 是 Ω 中的一个点。

式(1)、式(2)分别表示了流动中的动量守恒和质量守恒,求解该方程需要指定合适的定解条件,本文考虑无滑移速度边界条件和平均压力条件

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3)$$

$$\int \rho d\Omega = 0 \quad (4)$$

式中: $\mathbf{g}$ 为边界上给定的速度; Γ 是流动区域的边界。

采用文献[2]中的最小二乘等几何方法进行求解,先用 Newton 法将控制方程线性化,再对线性化

后的方程建立最小二乘变分,最后用 NURBS 基函数构造有限维空间将控制方程转化为代数方程

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (5)$$

2 基于多重网格技术的代数方程求解

2.1 多重网格算法

多重网格的基本思想是:在密网格上进行光滑,去掉高频误差;在疏网格上进行误差修正,去掉低频误差。在迭代中需要使用疏密不同的多组网格,并在不同网格之间进行转换。对基于 NURBS 的等几何方法不同尺寸的网格可在计算中用节点插入算法自动生成,不需要事先准备网格,网格转换算子可通过离散 B 样条得到[6]。由于文献[6]的算法是由较为简单的单变量泊松方程给出,要将其用于 Navier-Stokes 方程还需在以下 2 方面进行改进。

首先是建立向量值函数的网格转换算子。以二维问题为例,由于本文基于最小二乘方法,可采用相同的有限维空间近似 3 个独立变量,将代数方程中的未知量写成如下分块形式

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \mathbf{x}_3^T]^T \quad (6)$$

式中: $\mathbf{x}_1$ 、 $\mathbf{x}_2$ 、 $\mathbf{x}_3$ 分别是离散后 x 、 y 方向的速度以及压力。

对每一个独立变量按文献[6]建立插值算子 $\mathbf{P}'$,即对 $i=1,2,3$ 得

$$\mathbf{x}_i^h = \mathbf{P}' \mathbf{x}_i^H \quad (7)$$

式中: h 、 H 分别表示密网格和疏网格下的量。因此,总体向量的插值算子为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}' & & 0 \\ & \mathbf{P}' & \\ 0 & & \mathbf{P}' \end{bmatrix} \quad (8)$$

根据 Galerkin 条件可得限制算子为

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}^T \quad (9)$$

其次是如何满足平均压力为零的约束条件。理论上可以通过指定某个参考点压力值代替约束条件,但这种处理方法会严重降低多重网格迭代的收敛性,主要原因是在参考点处误差光滑效果降低。Brandt 指出:不必在密网格上处理这种约束条件,只需将约束条件的余量转换到疏网格上并进行误差修正即可[7],为此将式(4)离散成如下代数方程

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x}_3 = 0 \quad (10)$$

建立适用于 Navier-Stokes 方程的多重网格算法,算法 1 是其伪代码,该算法是从当前近似解 $\mathbf{x}_l^m$ 得到下一个近似解 $\mathbf{x}_l^{m+1}$ 的计算过程。算法中 l 是多重网格的层数, $\mathbf{A}_l$ 为第 l 层网格下的系数矩阵, $\mathbf{e}_l$

是第 l 层网格下的误差, $\mathbf{R}_l^{l-1}$ 为第 l 层到第 $l-1$ 层的限制算子, $\mathbf{P}_{l-1}^l$ 为第 $l-1$ 层到第 l 层的插值算子, $\mathbf{x}_{l,3}^m$ 是在第 l 层网格下离散后压力所对应的自由度, $\mathbf{a}_l$ 是第 l 层网格下压力约束条件离散后的系数, $a_{l,i}$ 是对应的分量, β_l 是第 l 层网格下压力约束方程的余量; $\mathbf{S}^{\mu_1}$ 表示进行 μ_1 次光顺, μ_1, μ_2 一般取 1 或 2; 参数 γ 表示粗网格修正的迭代次数, γ 决定了访问各层网格的路径, $\gamma=1$ 为 V 型循环, $\gamma=2$ 为 W 型循环。

如果当前网格为最疏网格 ($l=1$), 那么用直接方法求解, 对压力叠加一个常数使它满足压力约束条件。如果当前网格不是最疏的 ($l>1$), 先进行 μ_1 次光顺迭代, 通过限制算子将余量转换到下一层疏网格上 ($l-1$ 层), 并计算压力约束条件的余量, 然后在 $l-1$ 层调用 γ 次多重网格算法求解余量方程, 最后通过插值算子将修正量转换到 l 层, 进行 μ_2 次光顺迭代。

算法 1: $\mathbf{x}_l^{m+1} = \text{MG}(\mathbf{A}_l, \mathbf{b}_l, \mathbf{x}_l^m, l, \gamma, \mu_1, \mu_2)$

IF $l=1$

$$\mathbf{x}_l^{m+1} = \mathbf{A}_l^{-1} \mathbf{b}_l$$

$$\mathbf{x}_{l,3}^{m+1} = \mathbf{x}_{l,3}^{m+1} + \beta_l - \mathbf{a}_l^T \mathbf{x}_{l,3}^{m+1} / \sum_i a_{l,i}$$

ELSE

$$\mathbf{x}_l^{m+1} = \mathbf{S}^{\mu_1}(\mathbf{A}_l, \mathbf{b}_l, \mathbf{x}_l^m)$$

$$\mathbf{r}_{l-1} = \mathbf{R}_l^{l-1}(\mathbf{b}_l - \mathbf{A}_l \mathbf{x}_l^{m+1})$$

$$\beta_{l-1} = \beta_l - \mathbf{a}_l^T \mathbf{x}_{l,3}^{m+1}$$

$$\mathbf{e}_{l-1} = \text{MG}^\gamma(\mathbf{R}_l^{l-1} \mathbf{A}_l \mathbf{P}_{l-1}^l, \mathbf{r}_{l-1}, 0, l-1, \gamma, \mu_1, \mu_2)$$

$$\mathbf{x}_l^{m+1} = \mathbf{x}_l^{m+1} + \mathbf{P}_{l-1}^l \mathbf{e}_{l-1}$$

$$\mathbf{x}_l^{m+1} = \mathbf{S}^{\mu_2}(\mathbf{A}_l, \mathbf{b}_l, \mathbf{x}_l^{m+1})$$

END

2.2 多重网格共轭梯度法

共轭梯度法是一种 Krylov 子空间迭代方法, 它适用于系数矩阵为对称正定的情况, 而基于最小二乘法的系数矩阵总是对称正定的。理论上若代数方程的维数为 n , 那么进行 n 次共轭梯度法迭代将收敛到精确解; 实际计算中共轭梯度法的收敛速度快慢取决于所采用的预处理矩阵能否聚集系数矩阵的特征值^[3]。多重网格方法也可看成用简单迭代方法求解某个预处理矩阵作用下的代数方程, 这个预处理矩阵能够有效聚集矩阵特征值。

假设总共 k 层网格, 如果把多重网格迭代看成静态迭代方法, 那么它可写成如下矩阵形式

$$\mathbf{x}_k^{m+1} = (\mathbf{I}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{A}_k) \mathbf{x}_k^m + \mathbf{B}_k \mathbf{b}_k \quad (11)$$

式中: $\mathbf{B}_k = (\mathbf{I}_k - \mathbf{M}_k) \mathbf{A}_k^{-1}$ 为预处理矩阵; $\mathbf{M}_k$ 通过递

归给出^[8]

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= 0 \\ \mathbf{M}_k &= \mathbf{S}^{\mu_2}(\mathbf{I}_k - \mathbf{P}_{k-1}^k(\mathbf{I}_{k-1} - \mathbf{M}_{k-1}^l) \mathbf{A}_{k-1}^{-1} \mathbf{R}_{k-1}^{l-1} \mathbf{A}_k) \mathbf{S}^{\mu_1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

虽然 $\mathbf{B}_k$ 的表达式包含了 $\mathbf{A}_k$ 的逆矩阵和复杂的递归矩阵 $\mathbf{M}_k$, 无法直接生成, 但是它仍然可用作共轭梯度法的预处理矩阵。这是由于共轭梯度法只要求预处理矩阵对称正定, 能快速计算出与任意向量的乘积, 并不需要生成预处理矩阵。当 $\mu_1 = \mu_2$ 时, 采用 Jacobi 光顺或对称 Gauss-Seidel 光顺的 V 型和 W 型多重网格算法都满足对称正定要求^[9]。由式(11)可知: $\mathbf{B}_k$ 与任意向量 $\mathbf{v}$ 的乘积 $\mathbf{B}_k \mathbf{v}$ 可快速计算出, 实际上只要以 $\mathbf{0}$ 向量为初始值, 以 $\mathbf{v}$ 为右端项, 应用算法 1 进行一次多重网格迭代即可。算法 2 是多重网格共轭梯度法伪代码, 它与一般共轭梯度算法的不同是在预处理部分调用了算法 1 的多重网格迭代。

算法 2: $\text{MGCG}(\mathbf{A}_k, \mathbf{b}_k, \mathbf{x}, k, \gamma, \mu_1, \mu_2)$

$$\mathbf{r} = \mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{x}$$

$$\mathbf{z} = \text{MG}(\mathbf{A}_k, \mathbf{r}, \mathbf{0}, k, \gamma, \mu_1, \mu_2)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{z}$$

WHILE not converges

$$\tau = \mathbf{r}^T \mathbf{z}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}_k \mathbf{p}$$

$$\alpha = \tau / \mathbf{w}^T \mathbf{p}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{p}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r} - \alpha \mathbf{w}$$

$$\mathbf{z} = \text{MG}(\mathbf{A}_k, \mathbf{r}, \mathbf{0}, k, \gamma, \mu_1, \mu_2)$$

$$\beta = \mathbf{r}^T \mathbf{z} / \tau$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{z} + \beta \mathbf{p}$$

END

3 数值算例分析

考虑顶盖驱动流问题, 流动区域为单位正方形, 两侧及下壁面固定, 上壁面的运动速度 $\mathbf{u} = (-1, 0)$ 。该问题在文献中有可信的高精度计算结果^[10-12], 常作为基准问题用来考核新 CFD 算法的精确性。本文用 Matlab 编制了计算程序, 分别求解了雷诺数从 100 到 2 500 时的流动, 并与文献中的结果进行对比, 所有数值结果都是归一化的。

首先考虑低雷诺数下 ($Re=100$) 的流动。多重网格采用 5 层网格的 W 型循环, 最密网格为 32×32 , 最疏网格为 2×2 , 参数 μ_1, μ_2 均取为 2, 光顺算法为对称 Gauss-Seidel 迭代。计算中存在嵌套的两

层迭代,外层为 Newton 迭代,它的收敛条件是相邻两次迭代结果的相对误差小于 10^{-8} ;内层为线性方程的迭代,它的收敛标准是方程组的余量小于 10^{-10} 。

图 1 表示 $Re=100$ 时多重网格法(MG)和多重网格共轭梯度法(MGCG)的收敛过程,图中 k 是 NURBS 基函数的连续性指标,从最高点到最低点表示某个 Newton 迭代步下的线性方程组的收敛过程。对该问题总共需要 7 次 Newton 迭代,从图中可以看出,随着 Newton 迭代的推进,线性方程组求解所需的迭代次数逐渐减少。这是因为用前一 Newton 步的结果作为线性方程组迭代的初始值,随着 Newton 迭代的收敛,线性方程组的初始余量也逐渐降低,表现为图中的高点逐渐减低。比较图 1a、图 1b 可以看出,相同 k 下的 MGCG 迭代比 MG 迭代收敛速度快, $k=2$ 时,进行 23 次 MGCG 迭代方程组的余量降低了 10 个数量级, $k=1$ 时只需 14 次迭代;当 k 增大时,MG 迭代和 MGCG 迭代的收敛速度都降低,但是 MG 迭代的效率降低更多, k 从 1 增大到 2,MG 所需的迭代次数加倍,而 MGCG 所需的迭代次数只增加约 1/3。

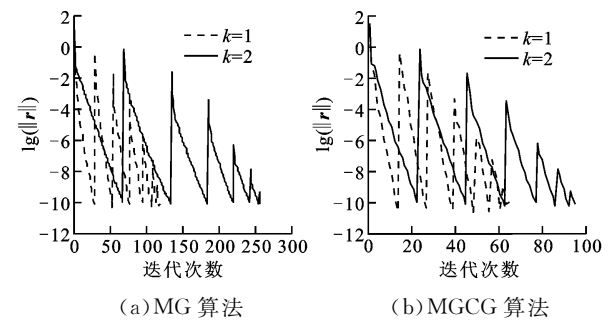


图 1 线性方程组的迭代求解收敛过程($Re=100$)

图 2 是不同 k 值下垂直中心线上的 x 方向速度以及水平中心线上的 y 方向速度分布,作为对比参照的是 Marchi 等^[10]用 $1\,024\times1\,024$ 网格得到的结果。本文 $k=1,2$ 时的总自由度数分别为 3 468 和 3 675,从图 2 中可以看出, $k=2$ 给出的速度分布更精确,当 k 值较大时,最小二乘等几何方法是一种高阶方法,网格数不变的条件下,数值解的误差将随 k 的增加呈指数速度下降^[1]。

从上面 k 对多重网格迭代收敛性和解的精度影响分析可知,较大的 k 值能给出更好的结果,MGCG 对 k 值的敏感性较低,因此基于精度和成本两方面考虑,计算中 k 应取较大值,而线性方程组应用 MGCG 迭代求解。

图 3 是 $Re=10$ 时多重网格共轭梯度法的迭代收敛性过程, $k=2$ 、网格数及多重网格参数与前面相同。比较图 3 与图 1b 可发现,每一个 Newton 步下 $Re=10$ 比 $Re=100$ 需要更多的迭代才能收敛,在文献[13]中也发现类似的现象,即对最小二乘法在很低雷诺数下用多重网格求解线性方程组不能提高计算效率。这是由于系数矩阵的条件数与雷诺数有关,对最小二乘等几何方法, $Re=10$ 时的条件数大于 $Re=100$ 时的条件数。

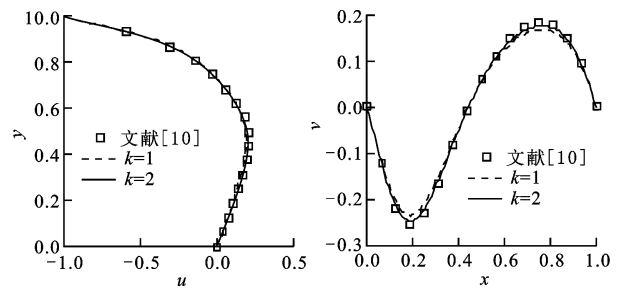


图 2 $Re=100$ 时几何中心线上速度分布

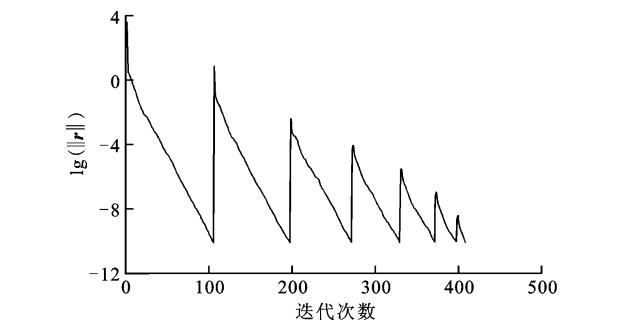
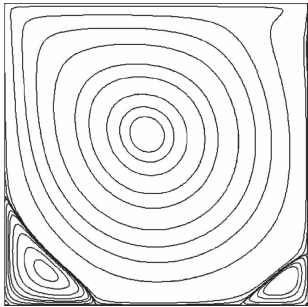


图 3 多重网格共轭梯度法收敛过程($Re=10$)

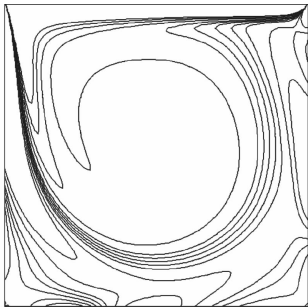
对中、高雷诺数流动分别计算了 $Re=400,1\,000,2\,500$ 的情况,由于流动的复杂性随着雷诺数的增加而增加,雷诺数为 400、1 000 时采用 64×64 网格,雷诺数为 2 500 时采用 128×128 网格。

在雷诺数较大的情况下,用雷诺数递进技术来解决 Newton 法收敛半径小的问题,先以零为初值求解 $Re=400$ 的流动,再以所得到的结果为初值增大雷诺数进行迭代计算,逐渐递增到指定的雷诺数。Newton 迭代收敛标准是相邻两次迭代结果的相对误差小于 10^{-10} ,MGCG 迭代收敛标准是方程组的余量小于 10^{-8} 。

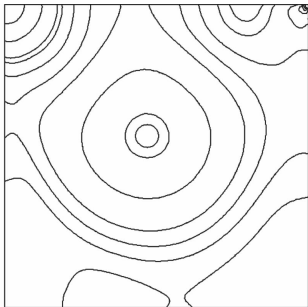
取 $k=6$ 进行计算,图 4 是 $Re=1\,000$ 时流函数、涡量和压力的分布图,可以看到流动中存在一个主涡,在左、右下角存在两个次涡,图中的分布趋势与文献[12]给出的分布图一致。表 1 和表 2 分别是主涡和左下角次涡的参数(流函数 ψ 、涡量 ω 、涡中心



(a)流函数



(b)涡量



(c)压力

图 4 顶盖驱动流的计算结果($Re=1\ 000$)

表 1 主涡的收敛性($Re=1\ 000$)

k	$\psi_{\max}$	ω	x	y
2	0.112 007	1.839 77	0.467 4	0.564 9
3	0.117 163	2.009 72	0.468 7	0.565 0
4	0.118 697	2.058 99	0.469 1	0.565 1
5	0.118 963	2.066 74	0.469 2	0.565 2
6	0.119 020	2.068 18	0.469 2	0.565 2
文献[12]	0.118 937	2.067 75	0.469 2	0.565 2

坐标 x,y 随 k 增大过程中的收敛情况,与文献[12]中的结果对比可以看出, $k=6$ 所得的数值解具有较高的精度,相对误差在 1% 以内。

表 3 是不同 k 下动能和最小二乘泛函的计算值,其中动能 $E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|u\|^2 d\Omega$,这两个量反映了 k 增大时的全局收敛性,表中的值是对逐个单元进行高斯积分后得到的。从表 3 中可以看出, k 从 2 增到 6 动能收敛到文献[14]中用 $1\ 024 \times 1\ 024$ 网格所得的结果。最小二乘泛函的误差主要集中在临近左、右上角的区域,除去角点处的一个单元后,最小二乘泛函的计算值为 4.083×10^{-5} ,这说明除去角点外大部分区域的数值结果都是可信的。

表 2 左下角次涡的收敛性($Re=1\ 000$)

k	$\psi_{\min}/10^{-3}$	ω	x	y
2	-1.579 73	-1.037 78	0.132 7	0.111 3
3	-1.694 06	-1.093 21	0.135 1	0.111 7
4	-1.726 40	-1.108 51	0.135 8	0.111 8
5	-1.731 64	-1.111 24	0.136 0	0.111 8
6	-1.732 37	-1.111 03	0.136 0	0.111 8
文献[12]	-1.729 72	-1.109 79	0.136 0	0.111 8

表 3 全局收敛性($Re=1\ 000$)

k	自由度数	E	LS 泛函
2	13 467	0.041 581	0.166 19
3	13 872	0.043 583	0.117 34
4	14 283	0.044 135	0.073 16
5	14 700	0.044 212	0.035 08
6	15 123	0.044 225	0.010 11
文献[14]		0.0445 03	

图 5 和图 6 分别是垂直中心线上 x 方向速度分布和水平中心线上 y 方向速度分布,其中 Marchi 等[10]采用了 $1\ 024 \times 1\ 024$ 网格,Erturk 等[11]采用了 600×600 网格,可以看出,对于 $Re=400,1\ 000,2\ 500$ 时本文方法得到的速度分布与文献中的高精度计算所得结果一致。

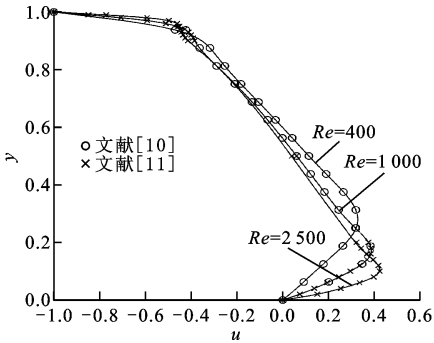


图 5 不同雷诺数下垂直中心线上 x 方向速度分布

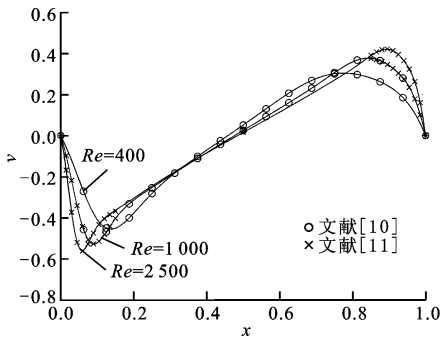


图 6 不同雷诺数下水平中心线上 y 方向速度分布

4 结 论

多重网格技术提高了最小二乘等几何方法模拟黏性流动的计算效率。多重网格迭代过程中用密网格使高频误差衰减掉,用疏网格使低频误差衰减掉,最终线性方程组的余量在迭代中快速衰减,将多重网格法与共轭梯度法相结合进一步提高了迭代收敛速度,进行 23 次迭代可使方程组的余量降低 10 个数量级。

流场的计算精度随 NURBS 基函数的连续性指标 k 的增大而提高。对雷诺数为 100、400、1 000 和 2 500 的顶盖驱动流进行了数值模拟, $k=6$ 时流动特征量的计算误差在 1% 以内, k 增大时多重网格共轭梯度法比多重网格法具有更好的收敛性。

参考文献:

- [1] 陈德祥,徐自力,刘石,等. 求解 Stokes 方程的最小二乘等几何分析方法 [J]. 西安交通大学学报, 2013, 47(5): 51-55.
CHEN Dexiang, XU Zili, LIU Shi, et al. Least squares isogeometric analysis for Stokes equation [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2013, 47(5): 51-55.
- [2] CHEN Dexiang, XU Zili, LIU Shi, et al. Least squares finite element method with high continuity NURBS basis for incompressible Navier-Stokes equations [J]. Journal of Computational Physics, 2014, 260: 204-221.
- [3] SAAD Y. Iterative methods for sparse linear systems [M]. Philadelphia, USA: SIAM, 2003.
- [4] GAHALAUT K P S, KRAUS J K, TOMAR S K. Multigrid methods for isogeometric discretization [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engi-

neering, 2013, 253: 413-425.

- [5] 刘石,陈德祥,冯永新,等. 等几何分析的多重网格共轭梯度法 [J]. 应用数学和力学, 2014, 25(6): 630-639.
LIU Shi, CHEN Dexiang, FENG Yongxin, et al. A multigrid preconditioned conjugate gradient method for isogeometric analysis [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2014, 25(6): 630-639.
- [6] 陈德祥,窦柏通,徐自力. 最小二乘等几何分析的多重网格方法 [J]. 西安交通大学学报, 2014, 48(7): 124-130.
CHEN Dexiang, DOU Baitong, XU Zili. Multigrid least squares isogeometric analysis [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2014, 48(7): 124-130.
- [7] BRANDT A, LIVNE O E. Multigrid techniques: 1984 guide with applications to fluid dynamics [M]. Philadelphia, USA: SIAM, 2011.
- [8] TATEBE O. The multigrid preconditioned conjugate gradient method [C] // The Sixth Copper Mountain Conference on Multigrid Methods. Copper Mountain, USA: NASA, 1993: 621-634.
- [9] TROTTEBERG U, OOSTERLEE C W, SCHULLER A. Multigrid [M]. London, UK: Academic Press, 2000: 28-50.
- [10] MARCHI C H, SUERO R, ARAKI L K. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a $1\,024 \times 1\,024$ grid [J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2009, 31(3): 186-198.
- [11] ERTURK E, CORKE T C, GOKCOL C. Numerical solutions of 2D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2005, 48(7): 747-774.
- [12] BOTELLA O, PEYRET R. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow [J]. Computers & Fluids, 1998, 27(4): 421-433.
- [13] RANJAN R, REDDY J N. On multigrid methods for the solution of least-squares finite element models for viscous flows [J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2012, 26(1): 45-65.
- [14] BRUNEAU C H, SAAD M. The 2D lid-driven cavity problem revisited [J]. Computers & Fluids, 2006, 35(3): 326-348.

(编辑 赵炜)